

УДК 517.958

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ

А.Н. Гордеева, Д.Н. Тумаков

Аннотация

Исследована задача дифракции плоской TE -поляризованной электромагнитной волны на металлических пластинах, расположенных в двух параллельных плоскостях. Исходная задача сведена к системе интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах относительно скачков напряженности магнитного поля при переходе через металлические экраны. Полученная система решена численно методом Галеркина с базисными функциями – полиномами Чебышева. Построены графики плотности энергии рассеянного поля для задач рассеяния на двух пластинах, расположенных рядом и друг над другом. Доказана теорема единственности решения задачи рассеяния в пространстве $H_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Ключевые слова: дифракция, TE -поляризованная электромагнитная волна, уравнение с логарифмической особенностью, метод Галеркина, полиномы Чебышева, теорема единственности.

Введение

В работе исследована задача рассеяния (дифракции) плоской TE -поляризованной электромагнитной волны на металлических пластинах, расположенных параллельно. История развития подходов к решению задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих тонких экранах подробно рассмотрена в [1]. Заметим, что частным случаем является задача дифракции электромагнитной волны на одном экране, которая относится к числу классических в электродинамике. При решении данной задачи применялись в основном метод моментов, метод конечных элементов и метод Галеркина с выбором простейших базисных и пробных функций (подробный обзор см. в [2]). Задачи дифракции на периодических решетках, в том числе и многослойных, исследованы с использованием задачи Римана–Гильберта в [3].

В настоящей работе задача сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями «на металле», решения которой ищутся в классе уходящих на бесконечность волн [4]. Уравнение Гельмгольца рассмотрено отдельно в плоском слое, в верхней и нижней полуплоскостях [5], разделенных прямыми, проходящими через плоскости, в которых расположены экраны. Образы Фурье следов на границах каждой из областей нормальных производных и самой искомой функции связаны соотношениями, полученными в [6] и [7]. Эти соотношения использованы при анализе исходной задачи.

Исследуемая задача сведена к системе интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах относительно скачков магнитной напряженности при переходе через металлические экраны. Полученная система решена численно методом Галеркина с базисными функциями – полиномами Чебышева. Рассмотрены

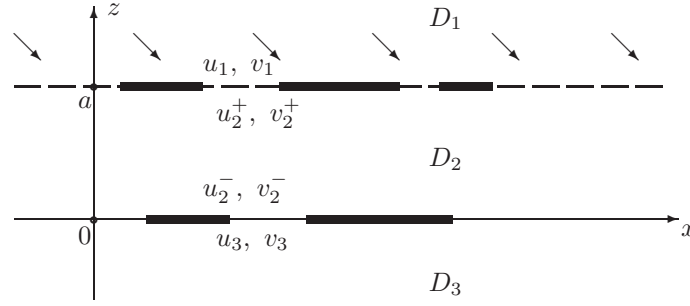


Рис. 1

частные случаи: задачи рассеяния на одной пластине и на двух пластинах, расположенных рядом и друг над другом. Приведены графики распределения плотности энергии поля для задач рассеяния на двух пластинах.

Обоснование существования решения задачи рассеяния на металлических экранах выходит за рамки данной статьи и может быть доказано стандартными методами (см., например, [8]). Доказательство единственности решения задачи приведено в последнем пункте. Для удобства рассуждений рассмотрены не классические, а обобщенные решения из класса $H_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ с дополнительными условиями на бесконечности.

1. Постановка задачи

Перед тем, как перейти к постановке задачи, заметим, что рассеяние волны происходит в трехмерном пространстве, а бесконечные тонкие пластины представляют собой бесконечные полосы.

Пусть в плоскостях $z = 0$ и $z = a$ декартовой системы координат размещены параллельно оси y идеально проводящие бесконечно тонкие пластины (в каждой плоскости их конечное число). Сверху (из области $z > a$) набегают плоская электромагнитная волна вида $u_0(x, z) = A_0 \exp(ik \sin \theta x + ik \cos \theta z)$, где θ – угол, отсчитываемый от оси z . Нужно найти электромагнитное поле, возникающее при ее дифракции. Ограничимся случаем, когда вектор \mathbf{E} падающей волны также параллелен оси y (TE -поляризация поля). Поэтому можно искать решение задачи дифракции, не зависящее от координаты y .

Ненулевые компоненты электромагнитного поля в случае TE -поляризации выражаются [5] через потенциальную функцию $u(x, z) = E_y(x, z)$, которая является решением двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (1)$$

Рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача сопряжения для этого уравнения. Плоскость xOz разобьем на три области (см. рис. 1): первая – верхняя полуплоскость $D_1 = \{(x, z) : z > a\}$, вторая – полоса $D_2 = \{(x, z) : 0 < z < a\}$, расположенная между рядами пластин и, наконец, третья – нижняя полуплоскость $D_3 = \{(x, z) : z < 0\}$.

Границу сопряжения верхней полуплоскости и полосы $z = a$ разобьем на части: обозначим через M_1 проекцию на ось x части, соответствующей металлическим

пластинам, и через N_1 – проекцию части без металлических пластин ($\overline{M_1 \cup N_1} = R$). Будем называть пластинами отрезки, соответствующие множеству M_1 . Аналогично поступим и с границей сопряжения нижней полуплоскости и полосы: обозначим через M_2 часть линии $z = 0$, соответствующую металлическим пластинам, а через N_2 – часть без металлических пластин.

Обозначим через $u_1(x)$ предельные значения искомой функции $E_y(x, z)$ при стремлении z к a сверху, а через $v_1(x)$ – предельные значения $H_x(x, z)$ (или, как следует из системы Максвелла, с точностью до постоянного множителя нормальной производной $\partial E_y(x, z)/\partial z$). Для предельных значений функции и нормальной производной при подходе к оси x из нижней полуплоскости введем обозначения $u_3(x)$ и $v_3(x)$. Парам функций $u_2^+(x)$, $v_2^+(x)$ и $u_2^-(x)$, $v_2^-(x)$ обозначим предельные значения $E_y(x, z)$ и $H_x(x, z)$ на верхней и нижней границах полосы соответственно.

В областях D_1 , D_2 и D_3 нужно найти решения уравнения (1) из класса распределений медленного роста на бесконечности, удовлетворяющие следующим условиям при $z = 0$ и $z = a$. Вне металлических пластин должны быть непрерывны касательные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . В нашем случае эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_2^+(x), \quad u_1(x) = u_2^+(x) \quad \text{при } x \in N_1, \\ v_2^-(x) &= v_3(x), \quad u_2^-(x) = u_3(x) \quad \text{при } x \in N_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Касательные составляющие напряженности электрического поля \mathbf{E} на идеально проводящих металлических пластинах равны нулю, что эквивалентно следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_2^+(x) = -u_0(x, a) \quad \text{при } x \in M_1, \\ u_2^-(x) &= u_3(x) = -u_0(x, 0) \quad \text{при } x \in M_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия на бесконечности определим следующим образом [4]: функция $u(x, z)$ должна быть ограничена на бесконечности или распространяться как волна (порождать волну, переносящую энергию) при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

Задача (1)–(3) вместе с условиями на бесконечности представляет собой математическую модель процесса рассеяния на металлических экранах TE -поляризованной электромагнитной волны, описываемой функцией $u_0(x, z)$.

2. Сведение задачи дифракции к системе интегральных уравнений

Образы Фурье нормальных производных и самой искомой функции на границах полуплоскостей связаны соотношениями (см. [6]):

$$\begin{aligned} V_1(\zeta) - i\gamma(\zeta) U_1(\zeta) &= 0, \\ V_3(\zeta) + i\gamma(\zeta) U_3(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

а в полосе – системой (см. [7])

$$\begin{aligned} e^{ia\gamma(\zeta)} [V_2^+(\zeta) - i\gamma(\zeta) U_2^+(\zeta)] - [V_2^-(\zeta) - i\gamma(\zeta) U_2^-(\zeta)] &= 0, \\ -e^{ia\gamma(\zeta)} [V_2^-(\zeta) + i\gamma(\zeta) U_2^-(\zeta)] + V_2^+(\zeta) + i\gamma(\zeta) U_2^+(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\gamma(\zeta) = \left\{ -\sqrt{k^2 - \zeta^2}, \quad |\zeta| < k, \quad i\sqrt{\zeta^2 - k^2}, \quad |\zeta| > k \right\}.$$

Уравнения (4) и (5) для вещественных ζ фактически заменяют собой уравнение (1). Таким образом, переходим от системы (1)–(3) к системе (2)–(5), которую и будем в дальнейшем решать.

При решении задач дифракции достаточно отыскать либо граничные значения самой функции, либо граничные значения нормальной производной [5–7]. Рассмотрим в качестве неизвестной граничные значения нормальной производной $v_n(x)$. Сведем исходную задачу (2)–(5) к системе интегральных уравнений относительно $v_n(x)$.

2.1. Первое уравнение системы. Рассмотрим выражение $V_2^+(\zeta) - i\gamma(\zeta)U_2^+(\zeta)$. Из уравнения (4) и условия (2) следует, что

$$\begin{aligned} V_2^+(\zeta) - i\gamma(\zeta)U_2^+(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2^+(x) e^{ix\zeta} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\gamma(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} u_2^+(x) e^{ix\zeta} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{M_1} + \int_{N_1} \right) v_2^+(x) e^{ix\zeta} dx - i\gamma(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{M_1} + \int_{N_1} \right) u_2^+(x) e^{ix\zeta} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{M_1} [v_2^+(x) - v_1(x)] e^{ix\zeta} dx - i\gamma(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{M_1} [u_2^+(x) - u_1(x)] e^{ix\zeta} dx. \end{aligned}$$

С учетом условия «на металле» (3) получим

$$V_2^+(\zeta) - i\gamma(\zeta)U_2^+(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{M_1} [v_2^+(x) - v_1(x)] e^{ix\zeta} dx. \quad (6)$$

Тогда из первого уравнения системы (5) имеем

$$V_2^-(\zeta) = i\gamma(\zeta)U_2^-(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\gamma(\zeta)} \int_{M_1} [v_2^+(x) - v_1(x)] e^{ix\zeta} dx. \quad (7)$$

Применив обратное преобразование Фурье к (7), получим

$$v_2^-(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2^-(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\zeta) e^{i(\tau-x)\zeta} d\zeta d\tau + \Omega_1(x),$$

где

$$\Omega_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\gamma(\zeta)} \int_{M_1} [v_2^+(\tau) - v_1(\tau)] e^{i\tau\zeta} d\tau e^{-ix\zeta} d\zeta. \quad (8)$$

Введем функцию

$$K_0(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma(\zeta) e^{i(\tau-x)\zeta} d\zeta.$$

Воспользуемся условием (2) и вторым уравнением (4). Получим

$$v_2^-(x) = \int_{M_2} [u_2^-(\tau) - u_3(\tau)] K_0(\tau, x) d\tau - v_3(x) + \Omega_1(x).$$

Из условия «на металле» (3) следует, что интеграл в правой части полученного выражения равен нулю. Таким образом,

$$2v_3(x) = \Omega_1(x) \quad \text{при } x \in N_2. \quad (9)$$

Из второго уравнения системы (4) получим

$$u_3(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau \quad \text{при } x \in M_2, \quad (10)$$

где ядро

$$K_1(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(\zeta)} e^{i(\tau-x)\zeta} d\zeta. \quad (11)$$

Преобразуем уравнение (10), используя (3) и (9):

$$\begin{aligned} -u_0(x, 0) = u_3(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \\ &= - \int_{N_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau - \int_{M_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{N_2} \Omega_1(\delta) K_1(\delta, x) d\delta - \int_{M_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau, \quad x \in M_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим в первое слагаемое правой части (12) выражение (8) для $\Omega_1(x)$ и поменяем пределы интегрирования:

$$-\frac{1}{2} \int_{N_2} \Omega_1(\delta) K_1(\delta, x) d\delta = -\frac{1}{2} \int_{M_1} [v_2^+(\tau) - v_1(\tau)] K_2(\tau, x) d\tau.$$

Здесь

$$K_2(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{N_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(t)} e^{i(\delta-x)t} dt e^{-i\delta\zeta} d\delta e^{i\tau\zeta + ia\gamma(\zeta)} d\zeta. \quad (13)$$

Запишем (12) как интегральное уравнение относительно функций $v_1(\tau)$, $v_3(\tau)$ и $v_2^+(\tau)$

$$- \int_{M_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau - \frac{1}{2} \int_{M_1} [v_2^+(\tau) - v_1(\tau)] K_2(\tau, x) d\tau = -u_0(x, 0), \quad x \in M_2. \quad (14)$$

2.2. Второе уравнение системы. Преобразуем множитель во втором уравнении системы (5) к виду

$$V_2^-(\zeta) + i\gamma(\zeta) U_2^-(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{M_2} [v_2^-(x) - v_3(x)] e^{ix\zeta} dx. \quad (15)$$

Здесь сначала использовано условие (2), далее интегралы от $v_3(x)$ и $u_3(x)$ были дополнены до бесконечных и использовано второе уравнение (4). Наконец, из условия «на металле» (3) следует, что $u_2^-(x) = u_3(x)$.

Второе уравнение (5) с учетом (15) приведем к виду

$$V_2^+(\zeta) = -i\gamma(\zeta) U_2^+(\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\gamma(\zeta)} \int_{M_2} [v_2^-(x) - v_3(x)] e^{ix\zeta} dx. \quad (16)$$

Применим обратное преобразование Фурье к (16). Используя (2), (4), получим следующее выражение для функции $v_2^+(x)$:

$$v_2^+(x) = - \int_{M_1} [u_2^+(\tau) - u_1(\tau)] K_0(\tau, x) d\tau - v_1(x) + \Omega_2(x),$$

где

$$\Omega_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ia\gamma(\zeta)} \int_{M_2} [v_2^-(\tau) - v_3(\tau)] e^{i\tau\zeta} d\tau e^{-ix\zeta} d\zeta. \quad (17)$$

Воспользуемся условиями (2), (3) и перейдем к функции $v_1(x)$. Получим $v_1(x) = -v_1(x) + \Omega_2(x)$ или

$$2v_1(x) = \Omega_2(x), \quad x \in N_1. \quad (18)$$

Из (3), (4) и (18) следует уравнение

$$-u_0(x, a) = \int_{M_1} v_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \frac{1}{2} \int_{N_1} \Omega_2(\tau) K_1(\tau, x) d\tau. \quad (19)$$

Второе слагаемое в правой части (19) в силу (17) будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \int_{N_1} \Omega_2(\delta) K_1(\delta, x) d\delta = \frac{1}{2} \int_{M_2} [v_2^-(\tau) - v_3(\tau)] K_3(\tau, x) d\tau.$$

Здесь через $K_3(\tau, x)$ обозначен интеграл

$$K_3(\tau, x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\gamma(\zeta)} e^{i\tau\zeta} e^{-i\delta\zeta} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(t)} e^{i(\delta-x)t} dt d\delta. \quad (20)$$

Уравнение (19) перепишем так:

$$\int_{M_1} v_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \frac{1}{2} \int_{M_2} [v_2^-(\tau) - v_3(\tau)] K_3(\tau, x) d\tau = -u_0(x, a), \quad x \in M_1, \quad (21)$$

оно и будет вторым в системе уравнений.

2.3. Другие уравнения системы. Для того чтобы получить третье уравнение, проведем рассуждения, аналогичные использованным при выводе уравнения (9). С учетом того, что в данном случае $x \in M_2$, получим

$$v_2^-(x) = -v_3(x) + \int_{M_1} [v_2^+(\tau) - v_1(\tau)] K_4(\tau, x) d\tau, \quad x \in M_2, \quad (22)$$

где

$$K_4(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\gamma(\zeta)} e^{i(\tau-x)\zeta} d\zeta.$$

Четвертое уравнение выводится как и уравнение (18), но при $x \in M_1$. В этом случае

$$v_2^+(x) = -v_1(x) + \int_{M_2} [v_2^-(\tau) - v_3(\tau)] K_4(\tau, x) d\tau, \quad x \in M_1. \quad (23)$$

Таким образом, построение системы уравнений завершено.

Теорема 1. *Задача (2)–(5) эквивалентна системе интегральных уравнений (14), (21), (22) и (23) относительно предельных значений нормальной производной на металлических экранах $v_1(x)$, $v_2^+(x)$, $v_2^-(x)$ и $v_3(x)$.*

Доказательство. Ранее было показано, что решения системы (14), (21)–(23) соответствуют решениям уравнений (2)–(5). При этом были использованы невырожденные преобразования. Следовательно, из системы (14), (21)–(23) обратными преобразованиями можно получить уравнения (2)–(5), таким образом, решения этих двух систем уравнений будут эквивалентными. \square

3. Анализ системы интегральных уравнений

Полученная система уравнений для численных расчетов очень неудобна, так как уравнения (14) и (21) под интегралами содержат ядра $K_2(\tau, x)$ и $K_3(\tau, x)$, которые определены как повторные интегралы (см. формулы (13) и (20)).

Запишем систему в другом виде, воспользовавшись формулами (12), (19), а также (22) и (23), выраженными через $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \int_{M_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \frac{1}{2} \int_{N_2} \Omega_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau &= u_0(x, 0), \quad x \in M_2, \\ \int_{M_1} v_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \frac{1}{2} \int_{N_1} \Omega_2(\tau) K_1(\tau, x) d\tau &= -u_0(x, a), \quad x \in M_1, \\ v_2^-(x) &= -v_3(x) + \Omega_1(x), \quad x \in M_2, \\ v_2^+(x) &= -v_1(x) + \Omega_2(x), \quad x \in M_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Сложим первое и третье уравнения полученной системы, предварительно умножив первое на 2, а третье – на $K_1(x, z)$ и проинтегрировав его по x по множеству M_2 . Получим

$$\begin{aligned} \int_{M_2} v_3(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau &= \\ &= \int_{M_2} v_2^-(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + 2u_0(x, 0), \quad x \in M_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части (25):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{M_1} [v_2^+(t) - v_1(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi-\zeta)\tau} d\tau \frac{1}{i\gamma(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi e^{ia\gamma(\zeta)+it\zeta} d\zeta dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл выразим через дельта-распределение. Воспользовавшись свойством дельта-распределения, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{M_1} [v_2^+(t) - v_1(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(\zeta)} e^{i(t-x)\zeta} e^{ia\gamma(\zeta)} d\zeta dt.$$

Введем функцию

$$K_5(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(\zeta)} e^{i(\tau-x)\zeta} e^{ia\gamma(\zeta)} d\zeta.$$

Тогда уравнение (25) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{M_2} [v_3(\tau) - v_2^-(\tau)] K_1(\tau, x) d\tau + \int_{M_1} [v_2^+(\tau) - v_1(\tau)] K_5(\tau, x) d\tau = \\ &= 2u_0(x, 0), \quad x \in M_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь сложим второе уравнение системы (24), умноженное на 2, и интеграл по M_1 от произведения четвертого уравнения на $K_1(x, \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{M_1} v_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_2(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \\ &= \int_{M_1} v_2^+(\tau) K_1(\tau, x) d\tau - 2u_0(x, a), \quad x \in M_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразуем слагаемое, содержащее $\Omega_2(\tau)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_2(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{M_2} [v_2^-(t) - v_3(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\gamma(\zeta)} e^{i(t-x)\zeta} e^{ia\gamma(\zeta)} d\zeta dt.$$

Таким образом, уравнение (27) преобразовано к виду

$$\begin{aligned} & \int_{M_1} [v_1(\tau) - v_2^+(\tau)] K_1(\tau, x) d\tau + \int_{M_2} [v_2^-(\tau) - v_3(\tau)] K_5(\tau, x) d\tau = \\ &= -2u_0(x, a), \quad x \in M_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (26), (28), (22) и (23) дают новую систему уравнений, в которой ядра не содержат повторных интегралов.

Введем две вспомогательные функции

$$w^-(\tau) = v_3(\tau) - v_2^-(\tau), \quad w^+(\tau) = v_2^+(\tau) - v_1(\tau). \quad (29)$$

Тогда уравнения (26) и (28) образуют независимую подсистему.

Теорема 2. *Задача дифракции TE -поляризованной электромагнитной волны на параллельных металлических экранах эквивалентна системе интегральных уравнений*

$$\begin{aligned} \int_{M_2} w^-(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \int_{M_1} w^+(\tau) K_5(\tau, x) d\tau &= 2u_0(x, 0), \quad x \in M_2, \\ \int_{M_1} w^+(\tau) K_1(\tau, x) d\tau + \int_{M_2} w^-(\tau) K_5(\tau, x) d\tau &= 2u_0(x, a), \quad x \in M_1 \end{aligned} \quad (30)$$

относительно скачков магнитной напряженности $w^-(\tau)$ и $w^+(\tau)$ при переходе через металлические экраны.

Доказательство теоремы 2 основано на взаимно однозначном соответствии системы (14), (21)–(23) и системы (30). Заметим, что искомые функции v_1 , v_3 и v_2^\pm определяются из (29) и уравнений (22) и (23).

4. Численное решение

Рассмотрим частные случаи общей задачи: рассеяние TE -поляризованной электромагнитной волны на отдельной пластине и на двух пластинах, расположенных рядом или друг над другом.

4.1. Рассеяние на одной пластине. В случае, если рассеяние происходит на одной металлической пластине с концами α и β , система уравнений (30) превращается в одно интегральное уравнение

$$\int_{\alpha}^{\beta} \omega^-(\tau) K_1(\tau, x) d\tau = 2u_0(x, 0), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (31)$$

Ядро данного уравнения, определенное формулой (11), выражается через функцию Ханкеля второго рода (см. [5]):

$$K_1(\tau, x) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) H_0^{(2)}(k|\tau - x|),$$

где k – волновое число. Известно [9], что

$$K_1(\tau, x) = -\ln \frac{1}{|\tau - x|} + r(\tau, x).$$

Здесь функция $r(\tau, x)$ представляет собой регулярную часть интегрального уравнения.

Искомую функцию $\omega^-(x)$ будем искать в виде разложения по полиномам Чебышева на отрезке $[\alpha, \beta]$

$$\omega^-(x) \approx \frac{1}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} \sum_{n=1}^N a_n \tilde{T}_{n-1}(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (32)$$

они выражаются через классические полиномы Чебышева по формуле

$$\tilde{T}_n(x) = T_n\left(\frac{2}{\beta - \alpha}x - \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Интегралы будем вычислять по квадратурной формуле Гаусса

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{\sqrt{(\beta - t)(t - \alpha)}} dt \approx \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M f(x_m) \quad (33)$$

с узлами

$$x_m = \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{2m - 1}{2M} \pi + \frac{\beta + \alpha}{2}, \quad m = 1, \dots, M.$$

Задача дифракции TE -поляризованной электромагнитной волны на отдельной металлической пластине сводится к СЛАУ

$$\sum_{n=1}^N a_n (\eta_{kn} + r_{kn}) = f_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (34)$$

относительно коэффициентов разложения искомой функции $\omega^-(x)$ по полиномам Чебышева a_n , где

$$\eta_{kn} = \begin{cases} \pi^2 \ln(\beta - \alpha), & k = n = 1, \\ \pi^2 / (2k), & k = n \neq 1, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$r_{kn} = - \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} r(\tau, x) \frac{\tilde{T}_{n-1}(t)}{\sqrt{(\beta - t)(t - \alpha)}} \frac{\tilde{T}_{k-1}(x)}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} dt dx,$$

с правой частью

$$f_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{\tilde{T}_{k-1}(x)}{\sqrt{(\beta - x)(x - \alpha)}} dx.$$

Таким образом, если решена система (34), то согласно приближенной формуле (32) может быть найдена функция $\omega^-(x)$. Для вычисления f_k воспользуемся формулой (33), а для вычисления r_{kn} формулу (33) применим дважды.

Искомое поле найдем по формуле

$$u(x, z) = \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \omega^-(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma(\xi)z + i\xi(\tau - x)}}{\gamma(\xi)} d\xi d\tau,$$

где внутренний интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma(\xi)z + i\xi(\tau - x)}}{\gamma(\xi)} d\xi = -\pi H_0^{(2)}\left(k\sqrt{z^2 + (\tau - x)^2}\right).$$

Введем функцию $G(z, x) = H_0^{(2)}(k\sqrt{z^2 + x^2})$. Тогда из (32) получим приближенную формулу для вычисления значения $u(x, z)$ в виде

$$u(x, z) \approx -\frac{i}{4} \sum_{n=1}^N a_n \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(\beta - \tau)(\tau - \alpha)}} \tilde{T}_{n-1}(\tau) G(z, \tau - x) d\tau.$$

4.2. Рассеяние на двух смежных пластинах. Рассмотрим задачу рассеяния TE -поляризованной электромагнитной волны на двух металлических пластинах, расположенных в плоскости $z = 0$. Обозначим $L(\tau, x) = -\ln |\tau - x| - r(\tau, x)$. Тогда система уравнений (30), так же как и в предыдущем случае, вырождается в одно уравнение

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi_1(\tau) L(\tau, x) d\tau + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \psi_2(\tau) L(\tau, x) d\tau = f(x), \quad x \in [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2].$$

Здесь $\psi_1(x) = \omega^-(x)$, $x \in [\alpha_1, \beta_1]$ и $\psi_2(x) = \omega^-(x)$, $x \in [\alpha_2, \beta_2]$. Правая часть уравнения есть $f(x) = -2\pi u_0(x, 0)$.

Для каждого интервала (α_j, β_j) , соответствующего металлической пластине с номером j , $j = 1, 2$, рассмотрим базисные функции

$$\tilde{T}_n^{(j)}(x) = T_n \left(\frac{2}{\beta_j - \alpha_j} x - \frac{\beta_j + \alpha_j}{\beta_j - \alpha_j} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Введем вектор

$$c_n = \begin{cases} a_n^{(1)}, & n = 1, \dots, N, \\ a_{n-N}^{(2)}, & n = N + 1, \dots, 2N. \end{cases}$$

Задача дифракции TE -поляризованной электромагнитной волны на двух смежных металлических пластинах сводится к СЛАУ

$$\sum_{n=1}^{2N} c_n (\eta_{kn} + r_{kn}) = f_k, \quad k = 1, \dots, 2N,$$

где

$$\eta_{kn} = \begin{cases} \pi^2 \ln(\beta_1 - \alpha_1), & k = n = 1, \\ \pi^2 \ln(\beta_2 - \alpha_2), & k = n = N + 1, \\ \pi^2 / (2k), & k = n < N + 1, \\ \pi^2 / (2(k - N)), & k = n > N + 1, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

а r_{kn} представляют собой двойные интегралы, содержащие $r(\tau, x)$.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, z) = -\frac{i}{4} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \omega^-(\tau) G(z, \tau - x) d\tau - \frac{i}{4} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \omega^-(\tau) G(z, \tau - x) d\tau$$

или приближенно

$$\begin{aligned} u(x, z) \approx & -\frac{i}{4} \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{(\beta_1 - \tau)(\tau - \alpha_1)}} \tilde{T}_{n-1}^{(1)}(\tau) G(z, \tau - x) d\tau - \\ & - \frac{i}{4} \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{1}{\sqrt{(\beta_2 - \tau)(\tau - \alpha_2)}} \tilde{T}_{n-1}^{(2)}(\tau) G(z, \tau - x) d\tau. \end{aligned}$$

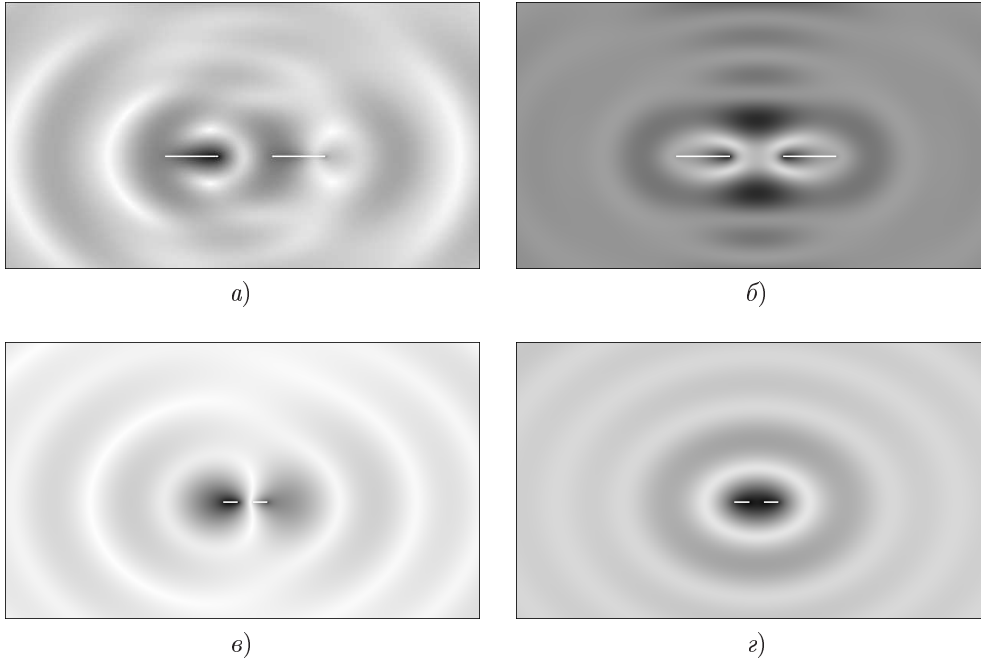


Рис. 2. Рассеяние на двух смежных пластинах ($\alpha_1 = -1.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\alpha_2 = 0.5$, $\beta_2 = 1.5$): а) $\theta = 0^\circ$, $\lambda = 2$, б) $\theta = 90^\circ$, $\lambda = 2$, в) $\theta = 0^\circ$, $\lambda = 10$, г) $\theta = 90^\circ$, $\lambda = 10$

Пусть на две пластины, расположенные в плоскости $z = 0$ падает плоская TE -поляризованная волна вида $u_0(x, z) = \exp(ik \cos \theta x + ik \sin \theta z)$ с единичной амплитудой. На рис. 2 изображено распределение плотности энергии при различных углах падения θ . Более темные участки соответствуют большей плотности энергии.

4.3. Рассеяние на двух параллельных пластинах. Рассмотрим еще один частный случай задачи дифракции, когда одна пластина расположена параллельно над другой. Система (30) примет вид

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \omega^+(\tau) L(\tau, x) d\tau - \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \omega^-(\tau) \pi G(a, \tau - x) d\tau = f_{(1)}(x), \quad x \in [\alpha_1, \beta_1],$$

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \omega^-(\tau) L(\tau, x) d\tau - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \omega^+(\tau) \pi G(a, \tau - x) d\tau = f_{(2)}(x), \quad x \in [\alpha_2, \beta_2]$$

с правыми частями $f_{(1)}(x) = -2\pi u_0(x, a)$ и $f_{(2)}(x) = -2\pi u_0(x, 0)$.

Как и в предыдущих случаях, исходная задача сводится к отысканию коэффициентов разложения функций $\omega^+(\tau)$ и $\omega^-(\tau)$ по полиномам Чебышева.

Задача дифракции TE -поляризованной электромагнитной волны на двух параллельных металлических пластинах сводится к СЛАУ

$$\sum_{n=1}^{2N} c_n (\eta_{kn} + r_{kn}) = f_k, \quad k = 1, \dots, 2N,$$

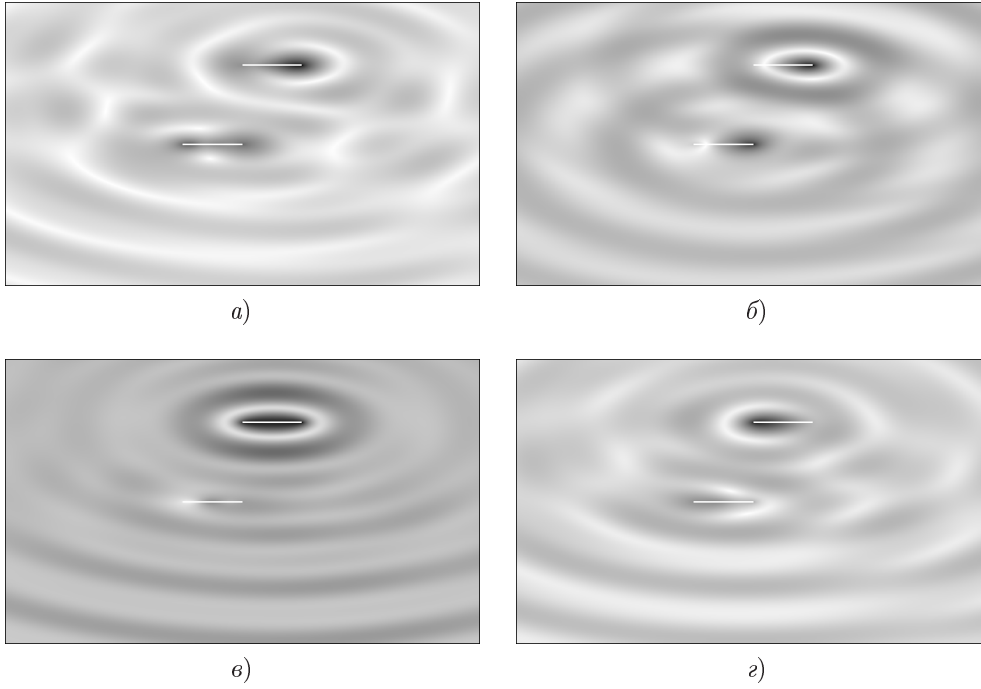


Рис. 3. Рассеяние на двух параллельных пластинах ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 0$, $a = 3$, $\lambda = 2$): а) $\theta = 0^\circ$, б) $\theta = 90^\circ$, в) $\theta = 45^\circ$, г) $\theta = 135^\circ$

коэффициенты и правые части которой определены таким же образом, что в п. 4.1 и 4.2.

Потенциальная функция рассеянного поля находится по формуле

$$u(x, z) = -\frac{i}{4} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \omega^-(\tau) G(z, \tau - x) d\tau - \frac{i}{4} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \omega^+(\tau) G(z - a, \tau - x) d\tau.$$

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим падение плоской TE -поляризованной волны, но уже на пластины, расположенные друг над другом. На рис. 3 изображено распределение плотности энергии для случая длины волны $\lambda = 2$.

5. Единственность решения задачи дифракции

Будем искать решение двумерного уравнения Гельмгольца (1) в пространстве $H_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ [1, гл. 1]. Как известно, если $u(x, z) \in H_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, то $u(x, z_0) \in H_{1/2}(\mathbb{R}^1)$ и $\partial u / \partial n(x, z_0) \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^1)$ для любого фиксированного z_0 . Решение уравнения Гельмгольца будет бесконечно дифференцируемым, поэтому можно искать это решение не как распределение, а как обычную функцию.

Если решение уравнения Гельмгольца принадлежит пространству $H_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, то в любой ограниченной области ограничена энергия электромагнитного поля. Поэтому при исследовании дифракции на незамкнутых металлических экранах не нужно включать в постановку задач условие «на ребре».

Обозначим $D_2^- = \{(x, z) : z \in (0+, a - 0)\}$. При $Q \rightarrow \infty$ области $D_2^{-Q} = \{(x, z) : |x| < Q, z \in (0+, a - 0)\}$ стремятся к D_2^- . Запишем для области

D_2^{-Q} вторую формулу Грина

$$\iint_{D_2^{-Q}} (u\Delta\bar{u} - \bar{u}\Delta u) d\sigma = \int_{\partial D_2^{-Q}} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (35)$$

Здесь ∂D_2^{-Q} – граница области D_2^{-Q} . Перейдем в формуле (35) к пределу при $Q \rightarrow \infty$ и получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_2^-} (u\Delta\bar{u} - \bar{u}\Delta u) d\sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u_2^-(x)\bar{v}_2^-(x) - \bar{u}_2^-(x)v_2^-(x)) dx - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} (u_2^+(x)\bar{v}_2^+(x) - \bar{u}_2^+(x)v_2^+(x)) dx + I_\infty, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} I_\infty &= - \lim_{Q \rightarrow \infty} \int_0^a \left(u(-Q, z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(-Q, z) - \bar{u}(-Q, z) \frac{\partial u}{\partial x}(-Q, z) \right) dz + \\ &\quad + \lim_{Q \rightarrow \infty} \int_0^a \left(u(Q, z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(Q, z) - \bar{u}(Q, z) \frac{\partial u}{\partial x}(Q, z) \right) dz. \end{aligned} \quad (37)$$

Выразим из уравнений (5) образы Фурье граничных значений нормальной производной через образы Фурье граничных значений искомой функции:

$$V_2^+(\zeta) = h_1(\zeta)U_2^+(\zeta) - h_2(\zeta)U_2^-(\zeta), \quad V_2^-(\zeta) = -h_1(\zeta)U_2^-(\zeta) + h_2(\zeta)U_2^+(\zeta), \quad (38)$$

где

$$h_1(\zeta) = i\gamma(\zeta) \frac{e^{ia\gamma(\zeta)} + e^{-ia\gamma(\zeta)}}{e^{ia\gamma(\zeta)} - e^{-ia\gamma(\zeta)}}, \quad h_2(\zeta) = \frac{i2\gamma(\zeta)}{e^{ia\gamma(\zeta)} - e^{-ia\gamma(\zeta)}}.$$

Преобразуем интегралы из правой части (36), воспользовавшись формулой Парсеваля и выражениями (38). В результате получим

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} (u_2^-(x)\bar{v}_2^-(x) - \bar{u}_2^-(x)v_2^-(x)) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (u_2^+(x)\bar{v}_2^+(x) - \bar{u}_2^+(x)v_2^+(x)) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (U_2^-(x)\bar{V}_2^-(x) - \bar{U}_2^-(x)V_2^-(x)) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (U_2^+(x)\bar{V}_2^+(x) - \bar{U}_2^+(x)V_2^+(x)) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i2\text{Im}[h_1(\zeta)] \left[|U_2^-(\zeta)|^2 + |U_2^+(\zeta)|^2 \right] d\zeta - \int_{-\infty}^{+\infty} i4\text{Im}[h_2(\zeta)] \text{Re} \left[U_2^-(\zeta)\bar{U}_2^+(\zeta) \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (36) примет вид

$$\begin{aligned} i(4\text{Re } k \text{ Im } k) \int \int_{D_2^-} |u|^2 d\sigma &= i2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[h_1(\zeta)] \left[|U_2^-(\zeta)|^2 + |U_2^+(\zeta)|^2 \right] d\zeta - \\ &\quad - i4 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[h_2(\zeta)] \text{Re} \left[U_2^-(\zeta)\bar{U}_2^+(\zeta) \right] d\zeta + I_\infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как k – вещественное число, то левая часть уравнения (39) равна нулю, а функции $h_1(\zeta)$ и $h_2(\zeta)$ также будут вещественными. Таким образом, для вещественного k получим, что $I_\infty = 0$. В представлении (37) для I_∞ значение a является произвольным, поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если функция u удовлетворяет уравнению Гельмгольца с постоянным вещественным коэффициентом k в полосе, то*

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \left[u(Q, z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(Q, z) - \bar{u}(Q, z) \frac{\partial u}{\partial x}(Q, z) - \right. \\ \left. - u(-Q, z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(-Q, z) + \bar{u}(-Q, z) \frac{\partial u}{\partial x}(-Q, z) \right] = 0.$$

Рассмотрим область $D_2^+ = \{(x, z) : z \in (0-, a + 0)\}$, ограниченную по переменной z , и области $D_2^{+Q} = \{(x, z) : |x| < Q, z \in (0-, a + 0)\}$. Рассуждая так же, как в случае области D_2^{-Q} , запишем вторую формулу Грина для области D_2^{+Q} и перейдем к пределу при $Q \rightarrow \infty$. Получим

$$\iint_{D_2^+} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_3(x) \bar{v}_3(x) - \bar{u}_3(x) v_3(x)) dx - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1(x) \bar{v}_1(x) - \bar{u}_1(x) v_1(x)) dx + I_\infty + I_M, \quad (40)$$

где

$$I_M = \int_{M_1} (u_1(x) \bar{v}_1(x) - \bar{u}_1(x) v_1(x) - u_2^+(x) \bar{v}_2^+(x) + \bar{u}_2^+(x) v_2^+(x)) dx + \\ + \int_{M_2} (u_3(x) \bar{v}_3(x) - \bar{u}_3(x) v_3(x) - u_2^-(x) \bar{v}_2^-(x) + \bar{u}_2^-(x) v_2^-(x)) dx = \\ = \int_{M_1} [-u_0(x, a) (\bar{v}_1(x) - \bar{v}_2^+(x)) + u_0(x, a) (v_1(x) - v_2^+(x))] dx + \\ + \int_{M_2} [u_0(x, 0) (\bar{v}_3(x) - \bar{v}_2^-(x)) - u_0(x, 0) (v_3(x) - v_2^-(x))] dx = 0$$

в силу граничных условий. Преобразуем интегралы (40), используя (4). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_3(x) \bar{v}_3(x) - \bar{u}_3(x) v_3(x)) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1(x) \bar{v}_1(x) - \bar{u}_1(x) v_1(x)) dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} i 2 \operatorname{Re} [\gamma(\zeta)] [|U_1(\zeta)|^2 + |U_3(\zeta)|^2] d\zeta.$$

Следовательно,

$$\int_{-k}^{+k} \sqrt{k^2 - \zeta^2} [|U_1(\zeta)|^2 + |U_3(\zeta)|^2] d\zeta = 0. \quad (41)$$

Из уравнения (41) и формулы (4) следует

Лемма 2. *Образы Фурье граничных значений искомых функций и их нормальных производных, определенных в областях D_1 и D_3 , равны нулю в интервале $(-k, k)$:*

$$U_1(\zeta) \equiv U_3(\zeta) \equiv 0, \quad V_1(\zeta) \equiv V_3(\zeta) \equiv 0.$$

Потенциальная функция в области D_1 имеет вид [10]

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(\xi) e^{i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi.$$

Таким образом, в силу леммы 2 получим при $R > 0$:

$$u(x, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi| > k} V_1(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}R - i\xi x} d\xi.$$

Оценим квадрат модуля функции $u(x, R)$, воспользовавшись теоремой Коши–Буняковского. Имеем

$$\begin{aligned} |u(x, R/2)|^2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{-1/2} |V_1(\xi)|^2 d\xi \int_{|\xi| > k} (1 + \xi^2)^{1/2} e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}R} d\xi \leq \\ &\leq 2 \|v_1(x)\|_{H_{-1/2}} \int_k^{+\infty} (1 + \xi^2)^{1/2} e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}R} d\xi. \end{aligned}$$

Для последнего интеграла

$$\int_k^{+\infty} (1 + \xi^2)^{1/2} e^{-\sqrt{\xi^2 - k^2}R} d\xi \leq \sqrt{\max(1, k)} \int_0^{+\infty} (\zeta + k) e^{-\zeta R} d\zeta = \sqrt{\max(1, k)} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \right).$$

Таким образом, получили оценку

$$|u(x, R/2)|^2 \leq 2\sqrt{\max(1, k)} \|v_1(x)\|_{H_{-1/2}} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \right)$$

при любом $R > 0$. Аналогичное неравенство выполняется для $|u(x, R)|$. Из оценки следует

Лемма 3. *При больших R справедливо асимптотическое представление для функции $u(x, R)$*

$$u(x, R) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Из леммы 3 следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, R) = 0$. Таким образом, при достаточно больших z получим, что в открытой области $u(x, z) = 0$ и, следовательно, в силу аналитичности, $u(x, z) \equiv 0$ в \mathbb{R}^2 [11, с. 148]. Окончательный результат сформулируем в следующей форме.

Теорема 3. *Задача дифракции ТЕ-поляризованной электромагнитной волны на системе металлических экранов, расположенных параллельно, может иметь только одно решение.*

Summary

A.N. Gordeeva, D.N. Tumakov. Diffraction of the Electromagnetic Wave on System of Parallel Metal Screens.

The paper views the problem of diffraction of the two-dimensional *TE*-polarised electromagnetic wave on the metal plates located in two parallel planes. The initial problem is reduced to a system of integral equations with logarithmic singularity in kernels as related to jumps of the magnetic field at transition through metal screens. The received system is solved numerically by a Galerkin method with basic functions – Chebyshev polynoms. Graphics of scattered field energy density have been constructed for diffraction problems on two plates posed nearby and one over the other. The uniqueness theorem of the problem of diffraction in space $H_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ is proved.

Key words: diffraction, *TE*-polarised electromagnetic wave, equation with logarithmic singularity, Galerkin method, Chebyshev polynoms, uniqueness theorem.

Литература

1. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
2. Miller E.K., Medgyesi-Mitschang L., Newman E.H. Computational electromagnetics: Frequency-domain method of moments. – N. Y.: IEEE Press, 1992. – 508 p.
3. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 400 с.
4. Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения задачи сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 5. – С. 63–80.
5. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций. – Препринт ПМФ-2000-01. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 50 с.
6. Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах. – Препринт ПМФ-03-02. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2003. – 34 с.
7. Махер А., Плещинский Н.Б. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоско-слоистой среде и ее приложения // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 1. – С. 45–56.
8. Хёниг Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
9. Плещинский Н.Б. Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмической особенностью в ядре и методах их регуляризации // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Казан. матем. об-во, 2002. – С. 90–120.
10. Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 4–32.
11. Берс Л., Джон Ф., Шефтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 352 с.

Поступила в редакцию
24.10.07

Гордеева Анастасия Николаевна – студент факультета ВМК Казанского государственного университета.

E-mail: *myangel86@mail.ru*

Тумаков Дмитрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *dtumakov@ksu.ru*